Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 9:30 — 17 giugno 2015
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

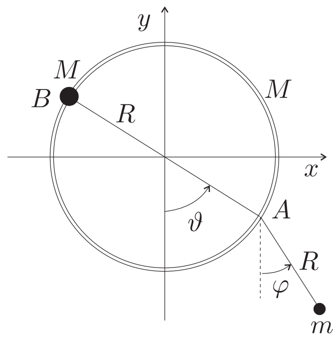
1.1 Nel piano $\mathbb{R}^2$ con coordinate x, y si consideri il campo vettoriale

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} xy + x - 2y \\ 2x - y^2 + y \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino gli equilibri;
2. Si linearizzi il sistema nel punto più vicino all'origine e se ne discuta la stabilità;
3. Si tracci grossomodo l'andamento del campo vettoriale in un intorno piccolo dell'equilibrio di cui al punto 2.

1.2 Per il sistema di Newton $m\ddot{x} = -V'(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ che espressione ha l'integrale dell'energia E? Cos'è un punto di inversione per tale sistema? Dati due punti in configurazione $x_0 < x_1$, e le velocità $v_0, v_1 > 0$ tali che (x_0, v_0), (x_1, v_1) appartengono alla stessa componente connessa dell'insieme $\{E = e\}$, come si calcola il tempo che impiega il flusso ad andare da x_0 ad x_1?

2



2.1 Nel piano Oxy, y verticale ascendente, un anello di massa M e raggio R può ruotare attorno al suo asse centrale ortogonale, che è fisso e orizzontale. Un pendolo P di massa $m < M$ e lunghezza R è sospeso a un punto A dell'anello; un punto materiale di massa M è invece fissato al punto B dell'anello diametralmente opposto a A (v. figura). Sul sistema agisce la gravità. Con riferimento alle coordinate lagrangiane θ e ϕ indicate in figura,
1. si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
2. si scriva la matrice cinetica del sistema;
3. infine, assumendo $M = 2m$, si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

2.2 Enunciare e dimostrare il Teorema C^0 della funzione di Lyapunov per la Lyapunov stabilità semplice (cioè, non asintotica).

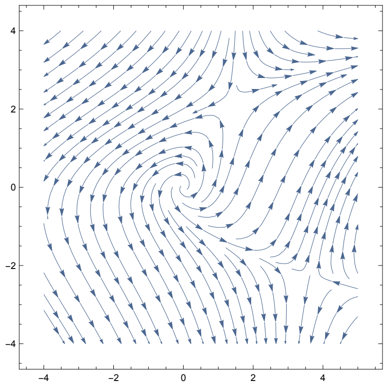
2.3 Si consideri la varietà vincolare delle configurazioni $S = \mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{R}$ una matrice ortogonale, $\mathbf{R} \in SO(n)$, e si consideri il cambio di coordinate (globale) $\bar{q} = \mathbf{R}q$. *(i)* Se $v = (v^1, \ldots, v^i, \ldots, v^n)$ rappresenta un vettore in T_qS nelle coordinate q, come si rappresenta lo stesso vettore nelle coordinate $\bar{q}$? *(ii)* Se $p = (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$ rappresenta una forma in T_q^*S nelle coordinate q, come si rappresenta la stessa forma nelle coordinate $\bar{q}$? *(iii)* La trasformazione $(q, p) \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$ può essere interpretata come Trasformazione Canonica di T^*S in sè? Perché?

Soluzioni

1.1 1. Dalla seconda componente del campo vettoriale si ottiene che $x = (y^2 - y)/2$. Sostituendo nell'equazione associata alla prima componente si ha $y(y^2-5)/2 = 0$, da cui si hanno i 3 equilibri $e_1 = (0,0)$, $e_2 = ((5-\sqrt{5})/2, \sqrt{5})$, ed $e_3 = ((5+\sqrt{5})/2, -\sqrt{5})$

2. La linearizzazione in e_1 porge il sistema lineare di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha autovalori $1 \pm 2i$, quindi si tratta di un equilibrio instabile.

3. Non è richiesto dall'esercizio, ma il ritratto in fase del sistema è



Per il teorema di Grobman-Hartman, qualora il punto di equilibrio sia iperbolico allora il ritratto in fase del sistema liberalizzato coincide con il ritratto in fase di un intorno abbastanza piccolo dell'equilibrio in esame. In questo caso l'equilibrio e_1 è iperbolico ed il ritratto in fase della sua linearizzazione è quello di un fuoco instabile, ovvero una spirale uscente. Il che è consistente con il ritratto in fase disegnato sopra.

Il disegno che avreste dovuto tracciare è quello che osservate in un intorno di $(0,0)$ nel disegno sopra.

Soluzione 2.1

L'energia gravitazionale (la gravità è l'unica forza attiva) è additiva: per l'anello è una costante dato che il suo baricentro sta sempre alla stessa quota, così:

$$\mathcal{U}(\theta, \phi) = MgR\cos\theta - mgR(cos\theta + \cos\phi)$$

Equilibri:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = -(M-m)gR\sin\theta, \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} = mgR\sin\phi. \end{aligned}$$

$$(\theta_E, \phi_E): \quad (0,0), \quad (0,\pi), \quad (\pi, 0), \quad (\pi,\pi)$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -(M-m)gR\cos\theta & 0 \\ 0 & mgR\cos\phi \end{pmatrix}$$

E' definita positiva esattamente in $(\pi, 0)$, unica configurazione di equilibrio stabile (THND):

$$\nabla^2\mathcal{U}(\pi,0) = \begin{pmatrix} (M-m)gR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}$$

Energia cinetica: $T(\theta, \phi, \dot\theta, \dot\phi)$,

$$T_{anello} = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2, \qquad (mom.\ d'In.\ dell'anello: \quad MR^2)$$

$$T_B = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2, \qquad (modulo\ della\ velocita'\ di\ B: \quad |R\dot\theta|)$$

Per T_P: bisogna determinare la velocità del punto di massa m del pendolo:

$$x_P = R(\sin\theta + \sin\phi), \qquad y_P = -R(\cos\theta + \cos\phi)$$

$$v_P^2 = (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi})$$

$$T_P = \frac{1}{2}mv_P^2$$

$$T_{totale} = \frac{1}{2}R^2[(2M+m)\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 + 2m\cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}]$$

$$matrice\ cinetica: \quad a(\theta,\phi) = R^2\begin{pmatrix} (2M+m) & m\cos(\theta-\phi) \\ m\cos(\theta-\phi) & m \end{pmatrix}$$

Nel caso $M = 2m$:

$$a(\pi,0) = R^2\begin{pmatrix} 5m & -m \\ -m & m \end{pmatrix} = mR^2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(\pi,0) = mR\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\nabla^2\mathcal{U}(\pi,0) - \omega^2 a(\pi,0)\right)$$

$$0 = \det\left(mR\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} - \omega^2 mR^2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} g - 5R\omega^2 & \omega^2 R \\ \omega^2 R & g - \omega^2 R \end{pmatrix}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{R}\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{3+\sqrt{5}}{4}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{3-\sqrt{5}}{4}}$$

Soluzione 2.3

$$\bar{q} = \bar{q}(q) \Rightarrow \bar{v} = J(q)v, \quad \bar{p} = J(q)^{-1}p, \quad J(q): Jacobiana$$

$$\bar{v} = \mathbf{R}v, \qquad \bar{p} = \mathbf{R}^{-T}p = \mathbf{R}p.$$

Ogni trasformazione $(q,p) \mapsto (\bar{q},\bar{p})$ in T^*S ereditata da una trasformazione di coordinate su S, come quella in studio, è canonica.